Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа включает в себя 20 заданий.
На выполнение работы отводится 3 часа.
Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр.
Примеры:

	Ответ	**Запись в бланк ответов**
Задание 5	$-0,3$	5 | − | 0 | , | 3
Задание 14	А Б В Г / 4 3 1 2	14 | 4 | 3 | 1 | 2

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $1\frac{5}{6}-0,5\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)$.

2. Найдите значение выражения $\frac{(0,1)^2}{10^{-2}}\cdot 10^2$.

3. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 22500 рублей. Какую сумму он получит после уплаты налогов? Ответ дайте в рублях.

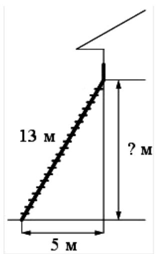
4. Ускорение тела (в $м/с^2$) при равномерном движении по окружности можно вычислить по формуле $a=\omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения (в $с^{-1}$), а R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите a (в $м/с^2$), если $R = 40$ *дм*, а $\omega = 7\ с^{-1}$.

5. Найдите значение выражения: $5^{\log_5 2+1}$.

6. Для ремонта требуется купить 23 лампочки. Каждая лампочка стоит 37 рублей. Сколько рублей сдачи получит покупатель, давший кассиру 1000 рублей за такую покупку?

7. Решите уравнение: $x^2 = 7x+8$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответ укажите меньший их них.

8. Пожарную лестницу длиной 13 м приставили к окну дома (см. рисунок). Нижний конец лестницы отстоит от стены дома на 5 м. На какой высоте расположено окно? Ответ дайте в метрах.



9. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент второго столбца.

Величины	Возможные значения
А) Объём комнаты	1) 78 200 $км^3$
Б) Объём воды в Каспийском море	2) 75 $м^3$
В) Объём ящика для овощей	3) 50 л
Г) Объём банки сметаны	4) 0,5 л

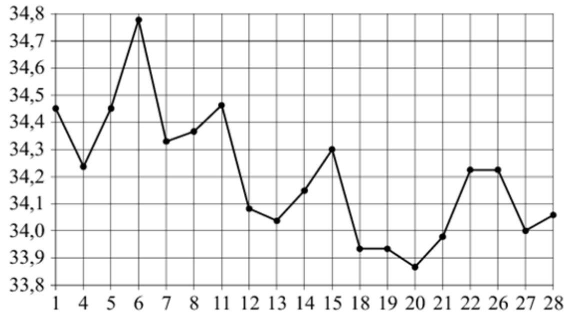
В приведенной ниже таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

А	Б	В	Г

В бланк ответов запишите последовательно цифры из нижней строки таблицы без пробелов, запятых и других дополнительных символов (см. инструкцию).

10. На птицеферме есть куры и гуси, причем кур в 9 раз больше, чем гусей. Найдите вероятность того, что случайно выбранная на ферме птица окажется гусем.

11. На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 февраля по 28 февраля 2003 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями. Определите по рисунку, какого числа курс евро был наименьшим за указанный период.

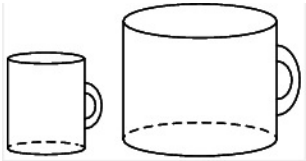


12. Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

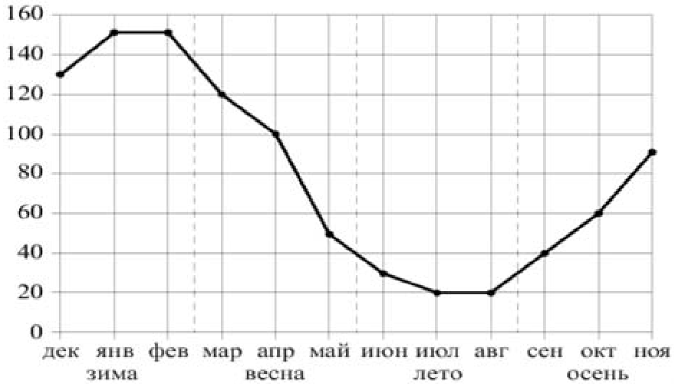
Номер переводчика	Языки	Стоимость услуг (руб. в день)
1	Английский, немецкий	7000
2	Немецкий	3900
3	Французский	2000
4	Испанский	2900
5	Испанский, английский	5850
6	Испанский, французский	6100

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют всеми четырьмя языками: английским, немецким, испанским и французским; а суммарная стоимость их услуг не превышает 12000 рублей в день. В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

13. Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка ниже второй в четыре раза, а вторая в полтора раза шире первой. Во сколько раз объем первой кружки меньше объема второй?



14. На рисунке точками показаны объёмы месячных продаж обогревателей в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных обогревателей. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж обогревателей.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДАЖ
А) Зима	1) Ежемесячный объём продаж был меньше 40 штук в течение всего периода
Б) Весна	2) Ежемесячный объём продаж достиг максимума
В) Лето	3) Ежемесячный объём продаж падал в течение всего периода
Г) Осень	4) Ежемесячный объём продаж рос в течение всего периода

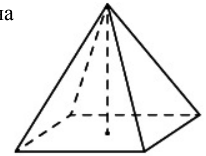
В приведенной ниже таблице под каждой буквой, соответствующей времени года, укажите номер соответствующей характеристики.

А	Б	В	Г

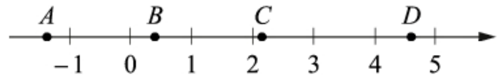
В бланк ответов запишите последовательно цифры из нижней строки таблицы без пробелов, запятых и других дополнительных символов (см. инструкцию).

15. Стороны параллелограмма равны 8 и 16. Высота параллелограмма, опущенная на меньшую сторону, равна 12. Найдите его высоту, опущенную на большую сторону.

16. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а боковое ребро равно $\sqrt{34}$.



17. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D (см. рисунок).



Число m равно $\log_3 5$.

Установите соответствие между указанными точками и числами в правом столбце, которые им соответствуют.

Точки	Числа
A	1) $6-m$
B	2) m^2
C	3) $-\frac{2}{m}$
D	4) $m-1$

В приведенной ниже таблице под каждой буквой, обозначающей точку, укажите номер соответствующего ей числа.

A	B	C	D

В бланк ответов запишите последовательно цифры из нижней строки таблицы без пробелов, запятых и других дополнительных символов (см. инструкцию).

18. Школа приобрела стол, доску, магнитофон и принтер. Известно, что принтер дороже магнитофона, а доска дешевле магнитофона и дешевле стола. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Магнитофон дешевле доски
2) Принтер дороже доски
3) Доска — самая дешёвая из покупок
4) Принтер и доска стоят одинаково

В бланк ответов запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

19. Найдите четырехзначное число, кратное 66, все цифры которого различны и четны. В ответе укажите какое-нибудь такое число.

20. На палке отмечены поперечные линии красного, желтого и зеленого цвета. Если распилить палку по красным линиям, то получится 5 кусков, если по желтым — 7 кусков, а если по зеленым — 11 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трех цветов?

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа включает в себя 20 заданий.
На выполнение работы отводится 3 часа.
Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр.
Примеры:

	Ответ	Запись в бланк ответов
Задание 5	$-0{,}3$	5 | – | 0 | , | 3
Задание 14	А Б В Г / 4 3 1 2	14 | 4 | 3 | 1 | 2

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $1{,}56:1{,}3-0{,}4$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{9^{-2}}{\left(9^{2}\right)^{-2}}$.

3. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 31500 рублей. Какую сумму он получит после уплаты налогов? Ответ дайте в рублях.

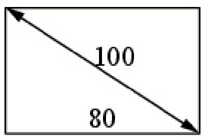
4. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P=\dfrac{U^2}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите R (в омах), если $P=7$ Вт и $U=14$ В.

5. Найдите значение выражения: $3^{5\log_3 2}$.

6. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 24 литра бензина. Цена бензина 36 рублей за литр. Сколько рублей сдачи должен получить клиент?

7. Решите уравнение: $x^2=4x+5$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответ укажите больший их них.

8. Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 100 см, а ширина экрана – 80 см. Найдите высоту экрана. Ответ дайте в сантиметрах.



9. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент второго столбца.

Величины	Возможные значения
А) Объём воды в озере Байкал	1) 1 л
Б) Объём пакета кефира	2) 23 615,39 км^3
В) Объём бассейна	3) 72 л
Г) Объём ящика для фруктов	4) 600 м^3

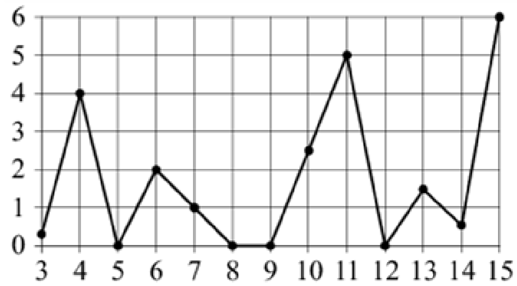
В приведенной ниже таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер ее возможного значения.

А	Б	В	Г

В бланк ответов запишите последовательно цифры из нижней строки таблицы без пробелов, запятых и других дополнительных символов (см. инструкцию).

10. На птицеферме есть утки и гуси, причем гусей в 3 раза больше, чем уток. Найти вероятность того, что случайно выбранная на ферме птица окажется уткой.

11. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями. Определите по рисунку, какого числа выпало наибольшее количество осадков за данный период.

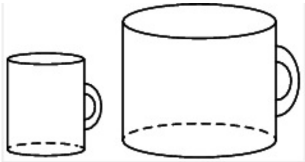


12. Для обслуживания международного семинара необходимо собрать группу переводчиков. Сведения о кандидатах представлены в таблице.

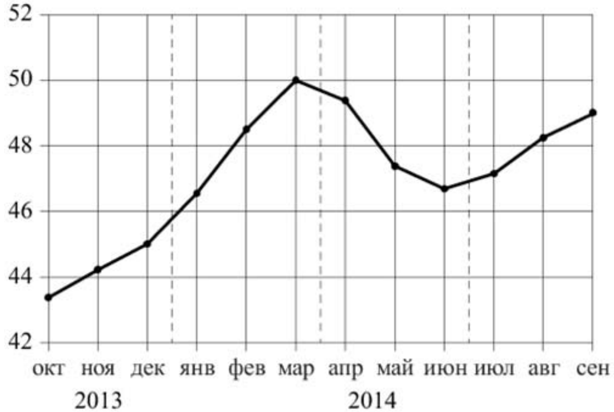
Номер переводчика	Языки	Стоимость услуг (руб. в день)
1	Французский	7000
2	Французский, английский	3900
3	Английский, испанский	2000
4	Французский, немецкий	2900
5	Немецкий	5850
6	Испанский	6100

Пользуясь таблицей, соберите хотя бы одну группу, в которой переводчики вместе владеют всеми четырьмя языками: английским, немецким, испанским и французским; а суммарная стоимость их услуг не превышает 12000 рублей в день. В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров переводчиков без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

13. Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка ниже второй в полтора раза, а вторая вдвое шире первой. Во сколько раз объем второй кружки больше объема первой?



14. На рисунке точками изображён среднемесячный курс евро в период с октября 2013 по года и по сентябрь 2014 года. По горизонтали указываются месяц и год, по вертикали – курс евро в рублях. Для наглядности точки соединены линиями.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику курса евро.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ КУРСА ЕВРО
А) Октябрь-декабрь 2013 г.	1) Курс евро был выше 46 рублей и на протяжении всего этого периода возрастал
Б) Январь-март 2014 г.	2) Курс евро был ниже 46 рублей
В) Апрель-июнь 2014 г.	3) После падения курс евро начал расти
Г) Июнь-сентябрь 2014 г.	4) Курс евро достиг максимума

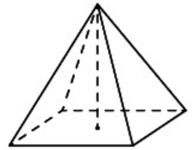
В приведенной ниже таблице под каждой буквой, соответствующей периоду времени, укажите номер соответствующей характеристики.

А	Б	В	Г

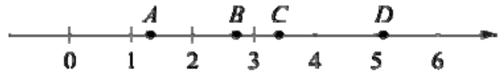
В бланк ответов запишите последовательно цифры из нижней строки таблицы без пробелов, запятых и других дополнительных символов (см. инструкцию).

15. В треугольнике ABC: $AB = BC = 25$, $AC = 14$. Найти длину медианы BM.

16. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а боковое ребро равно $\sqrt{17}$.



17. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D (см. рисунок).
Число m равно $\sqrt{3}$.



Установите соответствие между указанными точками и числами в правом столбце, которые им соответствуют.

Точки	Числа
A	1) $m+1$
B	2) m^3
C	3) $\sqrt{m}$
D	4) $\frac{6}{m}$

В приведенной ниже таблице под каждой буквой, обозначающей точку, укажите номер соответствующего ей числа.

A	B	C	D

В бланк ответов запишите последовательно цифры из нижней строки таблицы без пробелов, запятых и других дополнительных символов (см. инструкцию).

18. Некоторые сотрудники фирмы летом 2014 года отдыхали в Крыму, а некоторые — в Сочи. Все сотрудники, которые отдыхали в Сочи, не отдыхали в Крыму. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Если сотрудник этой фирмы летом 2014 года отдыхал в Крыму, то он отдыхал и в Сочи
2) Каждый сотрудник этой фирмы отдыхал летом 2014 года в Крыму
3) Среди сотрудников этой фирмы, которые не отдыхали в Сочи летом 2014 года, есть хотя бы один, который отдыхал в Крыму
4) Нет ни одного сотрудника этой фирмы, который летом 2014 года отдыхал и в Крыму, и в Сочи

В бланк ответов запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

19. Найти четырехзначное число, кратное 44, любые две соседние цифры которого отличаются на 1. В ответе укажите любое такое число.

20. На палке отмечены поперечные линии красного, желтого и зеленого цвета. Если распилить палку по красным линиям, то получится 6 кусков, если по желтым – 5 кусков, а если по зеленым – 12 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трех цветов?

Ответы к заданиям варианта № 1 (базовый)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,5	100	19575	196	10	149	–1	12	2134	0,1

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	134	9	2314	6	48	3421	23	2640	21

Замечание для эксперта! В задачах № 12 и № 19 учащиеся могут привести **ВЕРНЫЕ** ответы, отличающиеся от авторских

Ответы к заданиям варианта №2 (базовый)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,8	81	27405	28	32	136	5	60	2143	0,25

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
15	234	6	2431	24	16	3142	34	1012	21

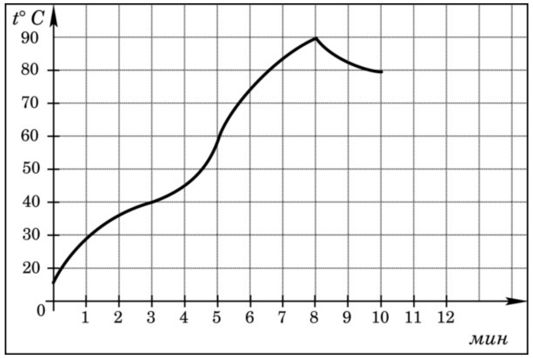
Замечание для эксперта! В задачах № 12 и № 19 учащиеся могут привести **ВЕРНЫЕ** ответы, отличающиеся от авторских

Вариант 1

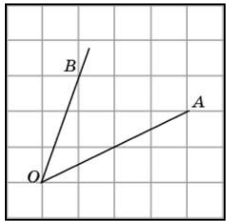
Ответом на задания 1 — 12 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

2. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры $60°$ до температуры $90°$.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол BOA. Найдите тангенс этого угла.



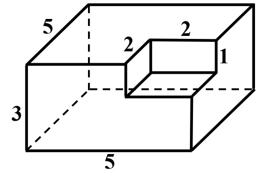
4. Фабрика выпускает сумки. В среднем 3 сумки из 25 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

5. Найдите корень уравнения $3^{\log_9(5x-5)} = 5$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 4$, $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите AC.

7. Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



9. Найдите значение выражения $\sqrt{3} - \sqrt{12}\sin^2\frac{5\pi}{12}$.

10. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = FS\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Для записи решений и ответов на задания 13 — 19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

13. а) Решите уравнение $\sin x(2\sin x - 3\operatorname{ctg} x) = 3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK{:}KA_1 = 1{:}2$. Через точки B и K проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM{:}MD_1 = 2{:}1$.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

15. Решите неравенство $\log_x(\sqrt{x^2+2x-3}+2)\cdot\log_5(x^2+2x-2) \geq \log_x 4$.

16. Окружность, вписанная в треугольник KLM, касается сторон KL, LM и MK в точках A, B и C соответственно.

а) Докажите, что $KC = \frac{KL+KM-LM}{2}$.

б) Найдите отношение $LB{:}BM$, если известно, что $KC : CM = 3:2$ и $\angle MKL = 60°$.

17. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн.руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 180% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды — 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

18. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y = 3|x + a| + |x^2 - x - 2|$ меньше 2.

19. После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что большая часть класса не поняла доказательство. На перемене один ученик вдруг понял доказательство (и только он). Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.

а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?

б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом?

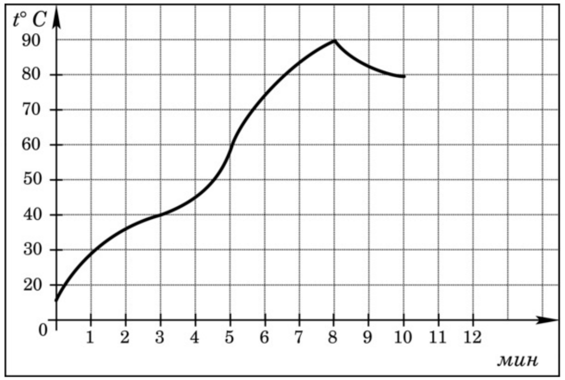
в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?

Вариант 2

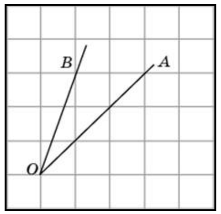
Ответом на задания 1 — 12 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единиц измерений писать не нужно.

1. Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

2. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 40°C до температуры 60°C.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол BOA. Найдите тангенс этого угла.



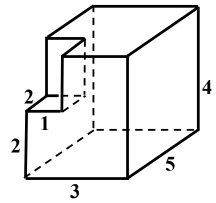
4. Фабрика выпускает кепки. В среднем 7 кепок из 50 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная кепка окажется без дефектов.

5. Найдите корень уравнения $5^{\log_{25}(2x-1)} = 3$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 3$, $\operatorname{tg} A = 0,75$. Найдите BC.

7. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 4x^2 + 3x + 4$. Найдите ординату точки касания.

8. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



9. Найдите значение выражения $\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$.

10. Трактор тащит сани с силой $F = 40$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 200$ м вычисляется по формуле $A = FS\cos\alpha$. При каком максимальном значении угла α (в градусах) совершённая работа будет не менее 4000 кДж?

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 6 минут, второй и третий — за 7 минут, а первый и третий — за 21 минуту. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Для записи решений и ответов на задания 13 — 19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

13. а) Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x + 3\sin x - 3}{\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14. В правильной четырехугольной призме $KLMNK_1L_1M_1N_1$ точка E делит боковое ребро KK_1 в отношении $KE:EA_1 = 1:3$. Через точки L и E проведена плоскость α, параллельная прямой KM и пересекающая ребро NN_1 в точке F.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро NN_1 пополам.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани $KLMN$, если известно, что $KL = 6$, $KK_1 = 4$.

15. Решите неравенство $\log_x(\sqrt{x^2 + x - 2} + 1) \cdot \log_7(x^2 + x + 1) \le \log_x 3$.

16. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и CA в точках K, M и N соответственно.

а) Докажите, что $AN = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

б) Найдите отношение $AK:KB$, если известно, что $AN:NC = 4:3$ и $\angle BAC = 60°$.

17. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 2 млн. руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 260% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды — 14 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За сколько месяцев в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

18. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y = |x^2 + 2x - 3| + 4|x - a|$ не больше 3.

19. После того, как учитель проверил контрольную работу, выяснилось, что первую задачу верно решила меньшая часть класса. На перемене один ученик доказал учителю, что его решение первого задания также является верным. Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.

а) Могло ли получиться так, что теперь уже большая часть класса верно решила первую задачу?

б) Могло ли получиться так, что исходно процент решивших первую задачу, выражался нецелым числом, а после перемены — целым числом?

в) Какое наименьшее натуральное значение может после перемены принять процент учеников класса, верно решивших первую задачу?

Ответы к заданиям варианта №1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	3	1	0,88	6	3,2	–1	110	–1,5	60	8,4	4

13	14	15	16	17	18	19
а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$, б) $-\frac{8\pi}{3}$.	б) $8\sqrt{6}$	$\left[2\sqrt{2}-1; +\infty\right)$	б) $5:2$	12,5 лет	$\left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right)$	а) да; б) да; в) 96.

Ответы к заданиям варианта №2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	2	0,5	0,86	5	1,8	4	94	–1,5	60	5,6	5

13	14	15	16	17	18	19
а) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; б) $\frac{17\pi}{6}$.	б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{6}$	$(1; 2]$	б) $5:7$	10 лет и 5 месяцев	$\left(-\frac{15}{4}; -2\right) \cup \left(0; \frac{7}{4}\right)$	а) да; б) да; в) 4.

Решения и критерии оценивания выполнения заданий 13 — 19

Вариант 1

13. а) Решите уравнение $\sin x(2\sin x-3\operatorname{ctg} x)=3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) $\sin x(2\sin x-3\operatorname{ctg} x)=3 \Leftrightarrow \begin{cases}2\sin^2 x-3\cos x-3=0\\ \sin x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos^2 x+3\cos x+1=0\\ \sin x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

б) Условию $x\in\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$ удовлетворяет только одно число $-\frac{8\pi}{3}$.

Ответ: а) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{8\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания 13	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и верно отобраны корни в пункте б)	2
Верно выполнен пункт а) ИЛИ Полученный в пунктах а) и б) ответ неверен в результате ОДНОЙ допущенной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей принципиально на ход решения и не упростившей задачу ИЛИ Пункт а) доведен до верных простейших уравнений, которые решены с ошибкой. При этом конкретные решения простейших уравнений, необходимые для пункта б), отобраны верно, и, следовательно, ответ в пункте б) верен **Замечание.** Отбор корней может быть произведен любым способом: на единичной окружности, перебором значений k и т.д., **но обязательно показан!**	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

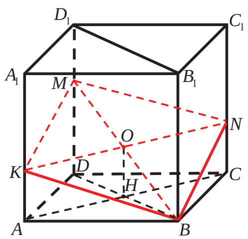
14. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK:KA_1=1:2$. Через точки B и K проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM:MD_1=2:1$.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB=4$, $AA_1=6$.

Решение.

а) Пусть четырехугольник $KBNM$ — сечение данной призмы плоскостью α (см. рисунок). Прямая AC параллельна плоскости α, а плоскость ACK пересекает плоскость α по прямой KN, следовательно, $KN \parallel AC$ и, значит, $AKNC$ — прямоугольник. Прямые BD и AC являются соответственно проекциями прямых BM и KN на плоскость ABC, значит, точка пересечения прямых BD и AC (точка H) является проекцией точки пересечения прямых BM и KN (точки O) на эту плоскость. Таким образом, $OH=AK=\frac{1}{3}AA_1$. С другой стороны, отрезок OH — средняя линия треугольника BDM и, следовательно, $DM=2OH=\frac{2}{3}AA_1=\frac{2}{3}DD_1$, откуда и следует доказываемое утверждение.



б) Так как $AC\perp BD$ и $AC\perp BB_1$, то $AC\perp(BDD_1)$. Но $KN\parallel AC$, значит, и $KN\perp(BDD_1)$. Следовательно, $KN\perp BM$, поскольку $BM\subset(BDD_1)$ и площадь сечения S равна $S=\frac{BM\cdot KN}{2}$.

Имеем: $KN=AC=AB\sqrt{2}=4\sqrt{2}$, $BM=\sqrt{BD^2+DM^2}=\sqrt{32+16}=4\sqrt{3}$, $S=\frac{4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{6}$.

Ответ: б) $8\sqrt{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания 14	Баллы
Имеется верное доказательство в пункте *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство в пункте *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* **(даже в том случае, если учащийся опирался на невыполненное или выполненное неверно задание *а*)**	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

15. Решите неравенство $\log_x(\sqrt{x^2+2x-3}+2)\cdot\log_5(x^2+2x-2)\geq\log_x 4$.

Решение. Область определения неравенства задается условиями $x^2+2x-3\geq 0$, $x>0$, $x\neq 1$, откуда получаем $x>1$. На этом множестве $\log_x 4>0$ и данное неравенство равносильно неравенству $\frac{\log_x(\sqrt{x^2+2x-3}+2)}{\log_x 4}\cdot\log_5(x^2+2x-2)\geq 1$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $\log_4(\sqrt{x^2+2x-3}+2)\cdot\log_5(x^2+2x-2)\geq 1$.

Положив $t=\sqrt{x^2+2x-3}$, где $t\geq 0$ получаем неравенство $\log_4(t+2)\cdot\log_5(t^2+1)\geq 1$. Заметим, что при $t\geq 0$ функция $f(t)=\log_4(t+2)\cdot\log_5(t^2+1)$ возрастает (произведение двух положительных возрастающих функций) и $f(2)=1$. Таким образом, множество решений этого неравенства является луч $t\geq 2$.

Далее имеем: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x-3}\geq 2,\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2x-7\geq 0,\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2\sqrt{2}-1$.

Ответ: $\left[2\sqrt{2}-1;+\infty\right)$.

Критерии оценивания выполнения задания 15	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только ошибками в строгости неравенства. Если в ответ или в ОДЗ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов». ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

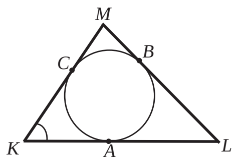
16. Окружность, вписанная в треугольник KLM касается сторон KL, LM и MK в точках A, B и C соответственно.

а) Докажите, что $KC=p-LM$, где p — полупериметр треугольника KLM.

б) Найдите отношение $LB:BM$, если известно, что $KC:CM=3:2$ и $\angle MKL=60°$.

Решение.

а) Отрезки AK и CK, AL и BL, BM и CM попарно равны, так как это отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки (см. рисунок).



Тогда: $2KC+2LB+2MB=2p$, $2KC=2p-2(LB+MB)=2(p-LM)$, откуда $KC=p-LM$, что и требовалось доказать.

б) Положим $KC=3$, $AL=x$, тогда $AK=3$, $MC=MB=2$, $BL=x$.

Согласно теореме косинусов получаем:

$LM^2=KM^2+KL^2-2\cdot KM\cdot KL\cdot\cos K$, $(x+2)^2=5^2+(x+3)^2-5(x+3)$, откуда $x=5$, $LB=5$.

Таким образом, $LB:BM=5:2$.

Ответ: $5:2$.

Критерии оценивания выполнения задания 16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Не доказано утверждения пункта а), но обоснованно получен верный ответ в пункте б) без использования утверждения пункта а) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а), получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при неверном доказательстве утверждения пункта а) и обоснованном решении пункта б) без использования утверждения пункта а) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен или выполнен неверно ИЛИ получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

17. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 180% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды – 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Решение. Пусть Вася купил квартиру в кредит. Тогда он должен погасить кредит за 20 лет, то есть за 240 одинаковых ежемесячных платежей. Сумма, которую он должен выплатить банку, по условию на 180% превышает исходные 3 млн. руб., то есть, равна $3000\cdot 2,8=8400$ тыс. руб. Разделив эту сумму на 240, получаем ежемесячный платеж, равный 35 тыс. руб.

Далее, если вместо этого Вася снимал квартиру, то после оплаты аренды у него будет оставаться ежемесячно 20 тыс. руб. Тогда 3 млн. руб. Вася накопит за $3000:20=150$ месяцев или за 12,5 лет.

Ответ: 12,5 лет.

Критерии оценивания выполнения задания 17	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верный ответ получен, но недостаточно обоснован	2
Верно построена математическая модель, но дальнейшее решение неверно или не закончено ИЛИ Верна найден ежемесячный платеж для случая кредита в банке	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

18. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y=3|x+a|+|x^2-x-2|$ меньше 2.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел и точки $x=-a, x=-1, x=2$ разбивают действительную ось на промежутки, в каждом из которых графиком данной функции является часть некоторой параболы. Заметим, что при $|x|\to\infty$ значения данной функции неограниченно возрастают. Следовательно, свое наименьшее значение данная функция принимает в одной из точек (или в нескольких этих точках) $x=-a$, $x=-1$, $x=2$, $x=x_1$, $x=x_2$, где x_1; x_2 — абсциссы вершин тех парабол, ветви которых направлены вверх.

Эти параболы $y=x^2-x-2+3(x+a)$ и $y=x^2-x-2-3(x+a)$ или $y=x^2+2x-2+3a$ и $y=x^2-4x-2-3a$. Абсциссы их вершин соответственно $x_1=-1$, $x_2=2$.

Таким образом, наименьшее значение функции $y=3|x+a|+|x^2-x-2|$ меньше 2 тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из неравенств: $y(-1)<2$, $y(2)<2$, $y(-a)<2$.

Так как $y(-1)=3|a-1|$, $y(2)=3|a+2|$, $y(-a)=|a^2+a-2|$ получаем совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}3|a-1|<2,\\ 3|a+2|<2,\\ |a^2+a-2|<2.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\frac{2}{3}<a-1<\frac{2}{3},\\ -\frac{2}{3}<a+2<\frac{2}{3}\\ \begin{cases}a^2+a-4<0,\\ a^2+a>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}<a<\frac{5}{3},\\ -\frac{8}{3}<a<-\frac{4}{3},\\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2}<a<-1,\\ 0<a<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}.\end{array}\right. \qquad (*)$$

Учитывая, что $17<4,2^2=17,64$, получаем $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}<\frac{3,2}{2}=1,6<\frac{5}{3}=1,66...$.

Аналогично $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}>-\frac{5,2}{2}=-2,6>-\frac{8}{3}=-2,66...$.

Таким образом, окончательно получаем $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\frac{8}{3}<a<-1,\\ 0<a<\frac{5}{3}.\end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{8}{3}<a<-1$, $0<a<\frac{5}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания 18	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Обосновано получен ответ, отличающийся от верного только исключением и/или включением граничных точек ИЛИ Ответ неверен вследствие одной вычислительной ошибки (описки), не повлиявшей на ход решения и не упростившей задачу	3
С помощью верного рассуждения получены искомые промежутки значений a, неверные из-за неверной оценки концов промежутков	2
(При аналитическом решении) Описано «поведение» функции $y=3\|x+a\|+\|x^2-x-2\|$, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют ИЛИ (при аналитическом решении) Описано поведение функции $y=3\|x+a\|+\|x^2-x-2\|$, но указаны не все точки, в которых функция может принимать наименьшее значение ИЛИ (при графическом решении) Задача сведена к исследованию взаимного расположения графиков функций $f(x)=\|x^2-x-2\|$ и $g(x)=2-3\|x+a\|$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

19. После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что большая часть класса не поняла доказательство. На перемене один ученик (и только он) вдруг понял доказательство. Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.

а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство?

б) Могло ли получиться так, что исходно процент понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены – нецелым числом?

в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?

Решение.

а) Да. Пусть в классе учится 29 человек, из которых сперва 15 человек не поняли доказательство (большая часть класса), а затем их осталось 14 (меньшая часть).

Замечание: подойдет любой пример с нечетным количеством учеников от 21 до 29 и количествами понявших и не понявших, отличающимися на 1.

б) Да. Пусть в классе было 24 ученика, из которых ровно 6 поняли доказательство. Тогда исходно процент понявших — 25, а после перемены, когда понявших станет 7, процент понявших будет нецелым.

Замечание: Есть и другие примеры, например, 3 ученика из 30 поняли доказательство на уроке.

в) Пусть всего в классе n учеников, а количество так и не понявших доказательство равно k. Очевидно, k не превосходит (n – 1), ведь один ученик понял доказательство на перемене. Тогда искомый процент равен $\frac{100k}{n}$. Чтобы это число было как можно большим, требуется максимизировать дробь $\frac{k}{n}$ при условии, что $100k \vdots n$.

Докажем, что наибольшее значение дроби $\frac{100k}{n}$ равно 96. Результат 96 достигается, если $k = 24$, $n = 25$. Если $n < 25$, то очевидно, что $\left(\frac{k}{n}\right)_{\max} < \frac{24}{25}$.

Далее, разберем случаи $n = 26, 27, 28, 29, 30$.

1) $n = 26$. Чтобы выполнялось условие $100k \vdots n$, необходимо взять k, кратное 13, что возможно только при $k = 13$, а $\frac{13}{26} < \frac{24}{25}$.

2) $n = 27$. Чтобы выполнялось условие $100k \vdots n$, необходимо взять k, кратное 27, что возможно только при $k = 0$.

3) $n = 28$. Чтобы выполнялось условие $100k \vdots n$, необходимо взять k, кратное 7, что возможно только при k не большем 21, а $\frac{21}{28} < \frac{24}{25}$.

4) $n = 29$. Чтобы выполнялось условие $100k \vdots n$, необходимо взять k, кратное 29, что возможно только при $k = 0$.

5) $n = 30$. Чтобы выполнялось условие $100k \vdots n$, необходимо взять k, кратное 3, что возможно только при k не большем 271, а $\frac{27}{30} < \frac{24}{25}$.

Таким образом, 96 – наибольшее целое значение искомого процента.

Ответ: а) да; б) да; в) 96.

Критерии оценивания выполнения задания 19	Баллы
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — верный пример в пункте *а*); — обоснованное решение пункта *б*); — доказательство того, что в пункте *в*) процент не превосходит 96; - пример того, что процент, равный 96, достигается	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

Решения и критерии оценивания выполнения заданий 13 — 19

Вариант 2

13. а) Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x+3\sin x-3}{\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение. а) $\dfrac{2\cos^2 x+3\sin x-3}{\cos x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos^2 x+3\sin x-3=0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sin^2 x-3\sin x+1=0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z,\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

б) Условию $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$ удовлетворяет только одно число $\dfrac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; б) $\dfrac{17\pi}{6}$.

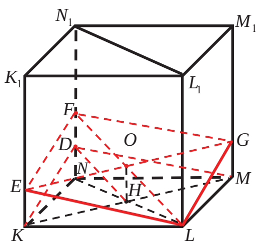
Критерии оценивания выполнения задания 13	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и верно отобраны корни в пункте б)	2
Верно выполнен пункт а) ИЛИ Полученный в пунктах а) и б) ответ неверен в результате ОДНОЙ допущенной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей принципиально на ход решения и не упростившей задачу ИЛИ Пункт а) доведен до верных простейших уравнений, которые решены с ошибкой. При этом конкретные решения простейших уравнений, необходимые для пункта б), отобраны верно, и, следовательно, ответ в пункте б) верен **Замечание.** Отбор корней может быть произведен любым способом: на единичной окружности, перебором значений k и т.д., **но обязательно показан!**	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

14. В правильной четырехугольной призме $KLMNK_1L_1M_1N_1$ точка E делит боковое ребро KK_1 в отношении $KE:EA_1=1:3$. Через точки L и E проведена плоскость α, параллельная прямой KM и пересекающая ребро NN_1 в точке F.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро NN_1 пополам.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани $KLMN$, если известно, что $KL=6$, $KK_1=4$.

Решение.



а) Пусть четырехугольник $ELGF$ — сечение данной призмы плоскостью α (см. рисунок). Прямая KM параллельна плоскости α, а плоскость KMG пересекает плоскость α по прямой EG, следовательно, $EG \parallel KM$ и, значит, $KMGE$ — прямоугольник. Прямые NL и KM являются соответственно проекциями прямых FL и EG на плоскость KLM, значит, точка пересечения прямых KM и NL (точка H) является проекцией точки пересечения прямых FL и EG (точки O) на эту плоскость. Таким образом, $OH=EK=\frac{1}{4}KK_1$. С другой стороны, отрезок OH — средняя линия треугольника FLN и, следовательно, $FN=2OH=2\cdot\frac{1}{4}KK_1=\frac{1}{2}KK_1$, откуда и следует доказываемое утверждение.

б) Пусть точка D — середина отрезка FN. Тогда $EK=FD$ и $EK\parallel FD$, следовательно, $EKDF$ — параллелограмм и, значит, $EF\parallel KD$. Так как и $EG\parallel KM$, то $(KDM)\parallel(EFG)$ и, значит, $\angle((EFG);(KMN))=\angle((KDM);(KMN))$. Поскольку $KLMN$ — квадрат, то $NH\perp KM$, но тогда, согласно теореме о трех перпендикулярах, и $DH\perp KM$. Таким образом, $\angle DHN=\varphi$ — линейный угол двугранного угла $\angle DKMN$. Из прямоугольного треугольника DNH находим $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{DN}{NH}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания 14	Баллы
Имеется верное доказательство в пункте *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Имеется верное доказательство в пункте *а*? ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) **(даже в том случае, если учащийся опирался на невыполненное или выполненное неверно задание *а*)**	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

15. Решите неравенство $\log_x(\sqrt{x^2+x-2}+1)\cdot\log_7(x^2+x+1)\le\log_x 3$.

Решение. Область определения неравенства задается условиями $x^2+x-2\ge 0$, $x>0$, $x\neq 1$, откуда получаем $x>1$. На этом множестве $\log_x 3>0$ и данное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{\log_x(\sqrt{x^2+x-2}+2)}{\log_x 3}\cdot\log_7(x^2+x+1)\le 1$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $\log_3(\sqrt{x^2+x-2}+1)\cdot\log_7(x^2+x+1)\le 1$.

Положив $t=\sqrt{x^2+x-2}$, где $t\ge 0$ получаем неравенство $\log_3(t+1)\cdot\log_7(t^2+3)\le 1$. Заметим, что при $t\ge 0$ функция $f(t)=\log_3(t+1)\cdot\log_7(t^2+3)$ возрастает (произведение двух положительных возрастающих функций) и $f(2)=1$. Таким образом, множество решений этого неравенства является промежуток $0\le t\le 2$.

Далее имеем: $\begin{cases}\sqrt{x^2+x-2}\le 2,\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-6\le 0,\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow 1<x\le 2$.

Ответ: $(1;2]$.

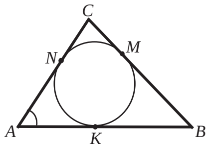
Критерии оценивания выполнения задания 15	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только ошибками в строгости неравенства. Если в ответ или в ОДЗ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов». ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

16. Окружность, вписанная в треугольник ABC касается сторон AB, BC и CA в точках K, M и N соответственно.

а) Докажите, что $AN = p - BC$.

б) Найдите отношение $AK:KB$, если известно, что $AN : NC = 4:3$ и $\angle BAC = 60°$.

Решение.



а) Отрезки AK и AN, BK и BM, CN и CM попарно равны, так как это отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки (см. рисунок).

Тогда, $2AN + 2BM + 2CM = 2p$, $2AN = 2p - 2(BM + CM) = 2(p - BC)$,

откуда $AN = p - BC$, что и требовалось доказать.

б) Положим $AN = 4$, $BK = x$, тогда $AK = 4, CN = CM = 3, BM = x$.

Согласно теореме косинусов получаем:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A$, $(x+3)^2 = 7^2 + (x+4)^2 - 7(x+4)$, $x = \frac{28}{5}$, $BK = \frac{28}{5}$.

Таким образом, $AK : KB = 5:7$.

Ответ: б) $5:7$.

Критерии оценивания выполнения задания 16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Не доказано утверждения пункта а), но обоснованно получен верный ответ в пункте б) без использования утверждения пункта а) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а), получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при неверном доказательстве утверждения пункта а) и обоснованном решении пункта б) без использования утверждения пункта а) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен или выполнен неверно ИЛИ получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

17. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 2 млн руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 260% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды – 14 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За сколько месяцев в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Решение. Пусть Вася купил квартиру в кредит. Тогда он должен погасить кредит за 20 лет, то есть за 240 одинаковых ежемесячных платежей. Сумма, которую он должен выплатить банку, по условию на 260% превышает исходные 2 млн. руб., то есть, равна $2000 \cdot 3,6 = 7200$ тыс. руб. Разделив эту сумму на 240, получаем ежемесячный платеж, равный 30 тыс. руб.

Далее, если вместо этого Вася снимал квартиру, то после оплаты аренды у него будет оставаться ежемесячно 16 тыс. руб. Тогда 2 млн. руб. Вася накопит за $2000:16 = 125$ месяцев или за 10 лет и 5 месяцев.

Ответ: 10 лет и 5 месяцев.

Критерии оценивания выполнения задания 17	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верный ответ получен, но недостаточно обоснован	2
Верно построена математическая модель, но дальнейшее решение неверно или не закончено ИЛИ Верна найден ежемесячный платеж для случая кредита в банке	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

18. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y = \left|x^2 + 2x - 3\right| + 4\left|x - a\right|$ не больше 3.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на множестве действительных чисел и точки $x = a, x = 1, x = -3$ разбивают действительную ось на промежутки, в каждом из которых графиком данной функции является часть некоторой параболы. Заметим, что при $|x| \to \infty$ значения данной функции неограниченно возрастают. Следовательно, свое наименьшее значение данная функция принимает в одной из точек (или в нескольких этих точках) $x = a$, $x = 1$, $x = -3$, $x = x_1$, $x = x_2$, где x_1; x_2 — абсциссы вершин тех парабол, ветви которых направлены вверх.

Эти параболы $y = x^2 + 2x - 3 + 4(x - a)$ и $y = x^2 + 2x - 3 - 4(x - a)$ или $y = x^2 + 6x - 3 - 4a$ и $y = x^2 - 2x - 3 + 4a$. Абсциссы их вершин соответственно $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Таким образом, наименьшее значение функции $y = \left|x^2 + 2x - 3\right| + 4\left|x - a\right|$ не больше 3 тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из неравенств: $y(1) \le 3$, $y(-3) \le 3$, $y(a) \le 3$.

Так как $y(1) = 4\left|a - 1\right|$, $y(-3) = 4\left|a + 3\right|$, $y(a) = \left|a^2 + 2a - 3\right|$ получаем совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 4\left|a-1\right| \le 3, \\ 4\left|a+3\right| \le 3, \\ \left|a^2+2a-3\right| \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{4} \le a-1 \le \frac{3}{4}, \\ -\frac{3}{4} \le a+3 \le \frac{3}{4} \\ \begin{cases} a^2+2a-6 \le 0, \\ a^2+2a \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} \le a \le \frac{7}{4}, \\ -\frac{15}{4} \le a \le -\frac{9}{4}, \\ -1-\sqrt{7} \le a \le -2, \\ 0 \le a \le \sqrt{7}-1. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Учитывая, что $7 < 2,7^2 = 7,29$, получаем $\sqrt{7} - 1 < 2,7 - 1 = 1,7 < \frac{7}{4} = 1,75$..

Аналогично $-1 - \sqrt{7} > -1 - 2,7 = -3,7 > -\frac{15}{4} = -3,75$.

Таким образом, окончательно получаем (*) $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} -\frac{15}{4} < a < -2, \\ 0 < a < \frac{7}{4}. \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{15}{4} < a < -2$, $0 < a < \frac{7}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания 18	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
Обосновано получен ответ, отличающийся от верного только исключением и/или включением граничных точек ИЛИ Ответ неверен вследствие одной вычислительной ошибки (описки), не повлиявшей на ход решения и не упростившей задачу	3
С помощью верного рассуждения получены искомые промежутки значений a, неверные из-за неверной оценки концов промежутков	2
(При аналитическом решении) Описано «поведение» функции $y=\left\|x^2+2x-3\right\|+4\|x-a\|$, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют ИЛИ (при аналитическом решении) Описано поведение функции $y=\left\|x^2+2x-3\right\|+4\|x-a\|$, но указаны не все точки, в которых функция может принимать наименьшее значение ИЛИ (при графическом решении) Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графиков функций, например, функций $f(x)=\left\|x^2+2x-3\right\|$ и $g(x)=3-4\|x-a\|$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

19. После того, как учитель проверил контрольную работу, выяснилось, что первую задачу верно решила меньшая часть класса. На перемене один ученик доказал учителю, что его решение первого задания также является верным. Также известно, что в классе учится не более 30, но не менее 20 человек.

а) Могло ли получиться так, что теперь уже большая часть класса верно решила первую задачу?

б) Могло ли получиться так, что исходно процент решивших первую задачу, выражался нецелым числом, а после перемены – целым числом?

в) Какое наименьшее натуральное значение может после перемены принять процент учеников класса, верно решивших первую задачу?

Решение.

а) Да. Пусть в классе учится 29 человек, из которых сперва 14 человек решили первую задачу (меньшая часть класса), а затем их стало 15 (большая часть класса).

Замечание: Подойдет любой пример с нечетным количеством учеников от 21 до 29 и количествами решивших и не решивших первую задачу, отличающимися на 1.

б) Да. Пусть в классе было 30 ученика, из которых ровно 2 решили первую задачу. Тогда исходно процент учеников, решивших первую задачу был нецелым $\left(\frac{20}{3}\right)$, а после перемены, когда решивших станет 3, процент решивших будет целым.

Замечание: Есть и другие примеры, например, 11 учеников из 24 поняли доказательство на уроке.

в) Пусть всего в классе n учеников, а количество не решивших первую задачу равно k. Очевидно, k не меньше 1, так как один ученик решил задачу верно и доказал это на перемене на перемене. Тогда искомый процент равен $\frac{100k}{n}$. Чтобы это число было как можно меньшим, требуется минимизировать дробь $\frac{k}{n}$ при условии, что $100k \vdots n$.

Докажем, что наименьшее значение дроби $\frac{100k}{n}$ равно 4. Результат 4 достигается, если $k = 1$, $n = 25$.

1) Если $n < 25$, то очевидно, что $\frac{k}{n} \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{25}$.

2) Если $n > 25$, то либо $k=1$, что не подходит, так как дроби $\frac{100}{26}; \frac{100}{27}; \frac{100}{28}; ...; \frac{100}{30}$ не являются натуральными числами, либо $k \geq 2$ и в этом случае $\frac{k}{n} \geq \frac{2}{n} \geq \frac{2}{30} > \frac{1}{25}$.

Таким образом, 4 – наибольшее целое значение искомого процента.

Ответ: а) да; б) да; в) 4.

Критерии оценивания выполнения задания 19	**Баллы**
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — верный пример в пункте а); — обоснованное решение пункта б); — доказательство того, что в пункте в) процент не меньше 4; — пример того, что процент, равный 96, достигается	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***